ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
И
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Лекция 6

Две дискретные случайные величины: $\left(A, B\right)$

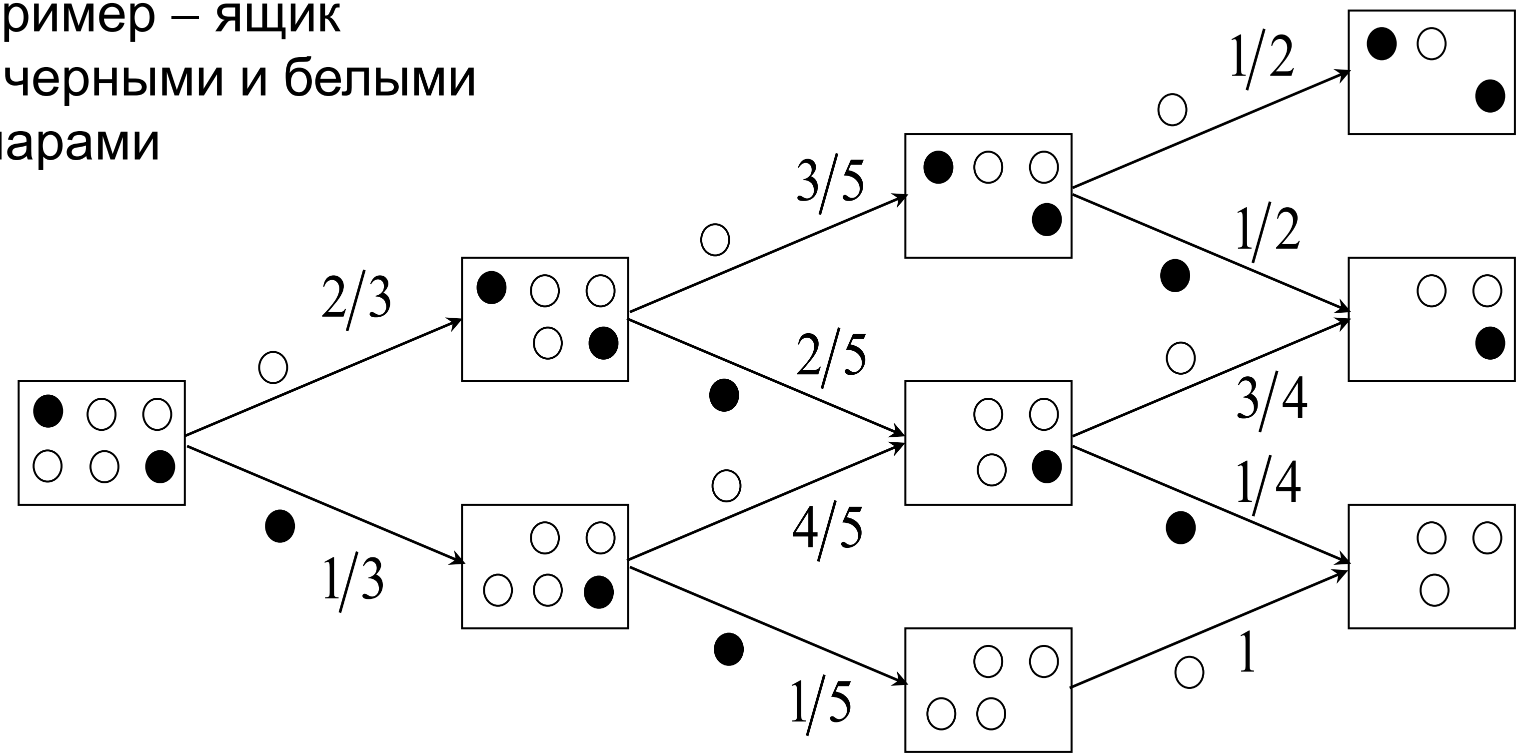
Возможные исходы: $A_k, \quad k = 1, 2, \ldots, K; \quad B_l, \quad l = 1, 2, \ldots, L$

Совместное распределение вероятностей: $p_{1,2}\left(A_k, B_l\right)$

Условная вероятность $p\left(B_l \mid A_k\right)$:

$$p_{1,2}\left(A_k, B_l\right) = p_1\left(A_k\right) p_2\left(B_l \mid A_k\right)$$

Пример – ящик
с черными и белыми
шарами



$$p_{1,2}\left(Б,Ч\right)=p_1\left(Б\right)p_2\left(Ч\mid Б\right)=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{5}=\frac{4}{15}$$

$$p_2\left(Ч\right)=p_1\left(Б\right)p_2\left(Ч\mid Б\right)+p_1\left(Ч\right)p_2\left(Ч\mid Ч\right)=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{5}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}=\frac{5}{15}$$

Безусловная вероятность $p_2\left(B_l\right)$:

$$p_2\left(B_l\right)=\sum_k p_{1,2}\left(A_k,B_l\right)=\sum_k p_1\left(A_k\right)p_2\left(B_l\mid A_k\right)$$

Статистическая независимость: $p\left(B_l\mid A_k\right)=p\left(B_l\right)$

Тогда $p_{1,2}\left(A_k,B_l\right)=p_1\left(A_k\right)p_2\left(B_l\right)$

$$p_2\left(B_l\right)=\sum_k p_1\left(A_k\right)p_2\left(B_l\right)=p_2\left(B_l\right)\underbrace{\sum_k p_1\left(A_k\right)}_{=1}$$

Две непрерывные случайные величины: (x, y)

Плотность вероятности $w(x, y)$

Вероятность попадания случайной точки $(\tilde{x}, \tilde{y})$
в малый прямоугольник со сторонами Δx и Δy :

$$w(x, y)\Delta x \Delta y = p(x < \tilde{x} < x + \Delta x,\ \ y < \tilde{y} < y + \Delta y)$$

Функция распределения $F(x, y)$

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} w(\tilde{x}, \tilde{y})\, d\tilde{x}\, d\tilde{y}$$

Смысл: $F(x, y) = p(-\infty < \tilde{x} < x,\ \ -\infty < \tilde{y} < y)$

По смыслу вероятности:

$$w(x, y) \geq 0$$

Условие нормировки $w(x, y)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} w(x, y)\, dxdy = 1$$

Крайние значения функции распределения:

$$F(-\infty, -\infty) = 0 \qquad F(\infty, \infty) = 1$$

Связь с одномерными функциями распределения

$$w(x) = \int_{-\infty}^{\infty} w(x, \tilde{y})\, d\tilde{y} \qquad w(y) = \int_{-\infty}^{\infty} w(\tilde{x}, y)\, d\tilde{x}$$

Плотности условной вероятности: $w(y|x)$ и $w(x|y)$

$$w(x,y)=w(y)w(x|y)$$

$$w(x,y)=w(x)w(y|x)$$

Статистическая независимость случайных величин x и y :

$$w(x|y)=w_x(x) \quad \text{и} \quad w(y|x)=w_y(y)$$

откуда $w(x,y)=w_x(x)w_y(y)$

Математическое ожидание

$$E\left(f\left(x,y\right)\right)=\left\langle f\left(x,y\right)\right\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f\left(x,y\right)w\left(x,y\right)dxdy$$

Начальные моменты: $f\left(x,y\right)=x^n y^m$

$$m_{xy}^{(n,m)}=\left\langle x^n y^m\right\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x^n y^m w\left(x,y\right)dxdy$$

Первые начальные моменты:

$$m_{xy}^{(1,0)}=\left\langle x\right\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xw\left(x,y\right)dxdy$$

$$m_{xy}^{(0,1)}=\left\langle y\right\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}yw\left(x,y\right)dxdy$$

Вторые начальные моменты:

$$m_{xy}^{(2,0)} = \left\langle x^2 \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x^2 w(x,y)\,dxdy$$

$$m_{xy}^{(0,2)} = \left\langle y^2 \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} y^2 w(x,y)\,dxdy$$

Смешанный момент
(начальный корреляционный момент):

$$m_{xy}^{(1,1)} = \left\langle xy \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyw(x,y)\,dxdy$$

Центральные моменты: $f\left(x, y\right) = \left(x - m_x^{(1)}\right)^n \left(y - m_y^{(1)}\right)^m$

$$\mu_{xy}^{(n,m)} = \left\langle \left(x - m_x^{(1)}\right)^n \left(y - m_y^{(1)}\right)^m \right\rangle =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(x - m_x^{(1)}\right)^n \left(y - m_y^{(1)}\right)^m w\left(x, y\right) dxdy$$

Первые центральные моменты:

$$\mu_{xy}^{(1,0)} = \left\langle \left(x - \left\langle x \right\rangle\right) \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(x - \left\langle x \right\rangle\right) w\left(x, y\right) dxdy = 0$$

$$\mu_{xy}^{(0,1)} = \left\langle \left(y - \left\langle y \right\rangle\right) \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(y - \left\langle y \right\rangle\right) w\left(x, y\right) dxdy = 0$$

Вторые центральные моменты

Дисперсия x:

$$\mu_{xy}^{(2,0)} = \sigma_x^2 = \left\langle \left(x - m_x^{(1)} \right)^2 \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(x - m_x^{(1)} \right)^2 w(x, y)\, dx dy$$

Дисперсия y:

$$\mu_{xy}^{(0,2)} = \sigma_y^2 = \left\langle \left(y - m_y^{(1)} \right)^2 \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(y - m_y^{(1)} \right)^2 w(x, y)\, dx dy$$

Смешанный момент (ковариация):

$$\mu_{xy}^{(1,1)} = \operatorname{cov}(x, y) = \left\langle \left(x - \langle x \rangle \right) \left(y - \langle y \rangle \right) \right\rangle =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(x - \langle x \rangle \right) \left(y - \langle y \rangle \right) w(x, y)\, dx dy$$

Выражение ковариации через начальные моменты (общий случай):

$$\operatorname{cov}(x, y) = \Big\langle \big(x - \langle x \rangle\big)\big(y - \langle y \rangle\big) \Big\rangle =$$

$$= \Big\langle xy - \langle x \rangle y - x \langle y \rangle + \langle x \rangle \langle y \rangle \Big\rangle =$$

$$= \langle xy \rangle - \langle x \rangle \langle y \rangle - \langle x \rangle \langle y \rangle + \langle x \rangle \langle y \rangle =$$

$$= \langle xy \rangle - \langle x \rangle \langle y \rangle$$

Случай статистически независимых случайных величин x и y

Всегда $\operatorname{cov}(x, y) = \langle xy \rangle - \langle x \rangle \langle y \rangle$

В этом случае $w(x, y) = w_x(x) w_y(y)$

$$\langle xy \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xyw(x, y)\,dxdy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xyw_x(x) w_y(y)\,dxdy =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} xw_x(x)\,dx \int_{-\infty}^{\infty} yw_y(y)\,dy = \langle x \rangle \langle y \rangle$$

Отсюда $\operatorname{cov}(x, y) = 0$

Коэффициент корреляции
случайных переменных x и y:

$$r(x, y) = \frac{\operatorname{cov}(x, y)}{\sigma_x \sigma_y}$$

Для независимых переменных:

$$r(x, y) = 0$$

Пределы изменения коэффициента корреляции:

$$-1 \le r(x, y) \le 1$$

Для любой функции двух случайных переменных:

$$\left\langle f\left(x,y\right)\right\rangle = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f\left(x,y\right)w\left(x,y\right)dxdy$$

$$\sigma^2_{f(x,y)} = \left\langle\left(f\left(x,y\right)-\left\langle f\left(x,y\right)\right\rangle\right)^2\right\rangle =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(f\left(x,y\right)-\left\langle f\left(x,y\right)\right\rangle\right)^2 w\left(x,y\right)dxdy$$

Две функции от случайных переменных x и y:

$$\operatorname{cov}\left(f_1\left(x,y\right), f_2\left(x,y\right)\right) =$$

$$= \left\langle\left[f_1\left(x,y\right)-\left\langle f_1\left(x,y\right)\right\rangle\right]\left[f_2\left(x,y\right)-\left\langle f_2\left(x,y\right)\right\rangle\right]\right\rangle =$$

$$= \left\langle f_1\left(x,y\right)f_2\left(x,y\right)\right\rangle - \left\langle f_1\left(x,y\right)\right\rangle\left\langle f_2\left(x,y\right)\right\rangle$$

ПФМ начальных моментов двух случайных величин:

$$M_{xy}^{(I)} = \left\langle e^{xu+yv} \right\rangle$$

Для непрерывных случайных величин:

$$M_{xy}^{(I)} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{xu+yv} w(x, y) \, dx dy$$

Для дискретных случайных величин:

$$M_{xy}^{(I)} = \sum_{k} \sum_{l} e^{x_k u + y_l v} p_{kl}$$

$$e^{xu+yv} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(xu + yv \right)^{n}$$

$$\left(xu + yv \right)^{n} = \sum_{j=0}^{n} C_{n}^{j} u^{j} v^{n-j} x^{j} y^{n-j} = \sum_{j=0}^{n} \frac{n!}{j!(n-j)!} u^{j} v^{n-j} x^{j} y^{n-j}$$

$$M_{xy}^{(I)} = \left\langle e^{xu+yv} \right\rangle = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^{n} \frac{n!}{j!(n-j)!} u^{j} v^{n-j} \left\langle x^{j} y^{n-j} \right\rangle$$

$$= ! + \underbrace{\left[\underset{j=0}{v \left\langle y \right\rangle} + \underset{j=1}{u \left\langle x \right\rangle} \right]}_{n=1} + \underbrace{\left[\frac{1}{2} \left(\underbrace{v^{2} \left\langle y^{2} \right\rangle}_{j=0} + 2 \underbrace{uv \left\langle xy \right\rangle}_{j=1} + \underbrace{u^{2} \left\langle x^{2} \right\rangle}_{j=2} \right) \right]}_{n=2} + \ldots$$