ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
И
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Лекция 7

Операция усреднения любой функции случайных аргументов по их распределению

1. Одна случайная величина x

x дискретна: $\left\langle f\left(x\right)\right\rangle = \sum_{k=1}^{K} f\left(x_k\right) p_k$

x непрерывна: $\left\langle f\left(x\right)\right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f\left(x\right) w\left(x\right) dx$

2. Две случайных величины $\left(x, y\right)$

x и y дискретны: $\left\langle f\left(x, y\right)\right\rangle = \sum_{k=1}^{K} \sum_{l=1}^{L} f\left(x_k, y_l\right) p_{kl}$

x и y непрерывны: $\left\langle f\left(x, y\right)\right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f\left(x, y\right) w\left(x, y\right) dxdy$

Основные свойства операции усреднения

1. $\langle A\rangle = A$, что следует из условия нормировки распределения вероятностей:

$$\sum_{k=1}^{K} p_k = 1 \qquad \sum_{k=1}^{K}\sum_{l=1}^{L} p_{kl} = 1 \qquad \int_{-\infty}^{\infty} w(x)\,dx = 1 \qquad \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} w(x,y)\,dxdy = 1$$

2. $\langle Af(x)\rangle = A\langle f(x)\rangle \qquad \langle Af(x,y)\rangle = A\langle f(x,y)\rangle$

3. $\langle f_1(x) + f_2(x)\rangle = \langle f_1(x)\rangle + \langle f_2(x)\rangle$

$$\langle f_1(x,y) + f_2(x,y)\rangle = \langle f_1(x,y)\rangle + \langle f_2(x,y)\rangle$$

Следствия, вытекающие из основных свойств операции усреднения

4. $f(x) = Ax + B$

4а. $\langle f(x) \rangle = A\langle x \rangle + B$

4б. $\sigma^2_{f(x)} = A^2 \sigma^2_x$

---

5. $$\sigma^2_{f(x,y)} = \left\langle \left[f(x,y) - \langle f(x,y) \rangle \right]^2 \right\rangle =$$

$$= \langle f^2(x,y) \rangle - \langle f(x,y) \rangle^2$$

Следствия, вытекающие из основных свойств операции усреднения

6. $f\left(x, y\right) = A_1 x + A_2 y + B$

6а. $\left\langle f\left(x, y\right)\right\rangle = A_1\left\langle x\right\rangle + A_2\left\langle y\right\rangle + B$

6б. $$\sigma^2_{f(x,y)} = \left\langle\left[\left(A_1 x + A_2 y + B\right) - \left(A_1\left\langle x\right\rangle + A_2\left\langle y\right\rangle + B\right)\right]^2\right\rangle =$$

$$= A_1^{\,2}\sigma_x^2 + A_2^{\,2}\sigma_y^2 + 2A_1A_2\operatorname{cov}\left(x, y\right)$$

$$\sigma_x^2 = \left\langle\left(x - \left\langle x\right\rangle\right)^2\right\rangle \quad \Bigg| \quad \sigma_y^2 = \left\langle\left(y - \left\langle y\right\rangle\right)^2\right\rangle \quad \Bigg| \quad \operatorname{cov}\left(x, y\right) = \left\langle\left(x - \left\langle x\right\rangle\right)\left(y - \left\langle y\right\rangle\right)\right\rangle$$

Следствия, вытекающие из основных свойств операции усреднения

7. Линейные преобразования переменных x и y:

$$X = A_1 x + B_1 \qquad Y = A_2 x + B_2$$

$$\langle X \rangle = A_1 \langle x \rangle + B_1 \qquad \langle Y \rangle = A_2 \langle x \rangle + B_2$$

$$\sigma_X^2 = A_1^{\,2} \sigma_x^2 \qquad \sigma_Y^2 = A_1^{\,2} \sigma_y^2$$

$$\operatorname{cov}(X, Y) = \Big\langle \big(A_1 x - A_1 \langle x \rangle \big) \big(A_2 y - A_2 \langle y \rangle \big) \Big\rangle =$$

$$= A_1 A_2 \Big\langle \big(x - \langle x \rangle \big) \big(y - \langle y \rangle \big) \Big\rangle = A_1 A_2 \operatorname{cov}(x, y)$$

Следствия, вытекающие из основных свойств операции усреднения

Коэффициент корреляции X и Y:

$$r\left(X,Y\right)=\frac{\operatorname{cov}\left(X,Y\right)}{\sigma_X\sigma_Y}=\frac{A_1A_2\operatorname{cov}\left(x,y\right)}{\left|A_1\right|\sigma_x\left|A_2\right|\sigma_y}=$$

$$=r\left(x,y\right)\cdot\operatorname{sign}\left(A_1\right)\cdot\operatorname{sign}\left(A_2\right)$$

Интервал значений коэффициента корреляции

Возьмем $$X = \frac{x - \langle x \rangle}{\sigma_x}, \qquad Y = \frac{y - \langle y \rangle}{\sigma_y}$$

Для них: $$\langle X \rangle = \frac{\langle x - \langle x \rangle \rangle}{\sigma_x} = 0, \qquad \sigma_X^2 = \frac{1}{(\sigma_x)^2}\sigma_x^2 = 1$$

$$\langle Y \rangle = \frac{\langle y - \langle y \rangle \rangle}{\sigma_y} = 0, \qquad \sigma_Y^2 = \frac{1}{(\sigma_y)^2}\sigma_y^2 = 1$$

Здесь $$A_1 = \frac{1}{\sigma_x} > 0, \qquad A_2 = \frac{1}{\sigma_y} > 0$$

Тогда $$r(x, y) = r(X, Y) = \frac{\operatorname{cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = \operatorname{cov}(X, Y)$$

Рассмотрим случайные величины $(X+Y)$ и $(X-Y)$

$$\sigma_{X+Y}^2 = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2 + 2\operatorname{cov}(X,Y) = 2\left[1+\operatorname{cov}(X,Y)\right]$$

$$\sigma_{X-Y}^2 = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2 - 2\operatorname{cov}(X,Y) = 2\left[1-\operatorname{cov}(X,Y)\right]$$

$\sigma_{X+Y}^2 \geq 0$	$\sigma_{X-Y}^2 \geq 0$
$1+\operatorname{cov}(X,Y) \geq 0$	$1-\operatorname{cov}(X,Y) \geq 0$
$\operatorname{cov}(X,Y) = r(x,y) \geq -1$	$\operatorname{cov}(X,Y) = r(x,y) \leq 1$

$$-1 \leq r(x,y) \leq 1$$

Когда коэффициент корреляции равен ±1 ?

$r(x,y)=1$, когда $\sigma^2_{X-Y}=0$, $X-Y=Const$

$$Y=X+Const \qquad\qquad y=\frac{\sigma_y}{\sigma_x}x+Const$$

$r(x,y)=-1$, когда $\sigma^2_{X+Y}=0$, $X+Y=Const$

$$Y=-X+Const \qquad\qquad y=-\frac{\sigma_y}{\sigma_x}x+Const$$

Оценки ошибок значений простейших функций двух случайных величин

1) $f(x,y) = A_1 x + A_2 y$

$$\sigma^2_{A_1 x + A_2 y} = A_1^{\,2}\sigma_x^2 + A_2^{\,2}\sigma_y^2 + 2A_1 A_2 \operatorname{cov}(x,y) =$$
$$= A_1^{\,2}\sigma_x^2 + A_2^{\,2}\sigma_y^2 + 2A_1 A_2 \sigma_x \sigma_y r(x,y)$$

$$\left(A_1\sigma_x - A_2\sigma_y\right)^2 \le \sigma^2_{A_1 x + A_2 y} \le \left(A_1\sigma_x + A_2\sigma_y\right)^2$$

Если x и y статистически независимы, то

$$\sigma^2_{A_1 x + A_2 y} = A_1{}^2 \sigma_x^2 + A_2{}^2 \sigma_y^2$$

Для суммы и для разности x и y:

$$\sigma^2_{x \pm y} = \sigma_x^2 + \sigma_y^2$$

Средняя квадратичная ошибка:

$$\sigma_{A_1 x + A_2 y} = \sqrt{A_1{}^2 \sigma_x^2 + A_2{}^2 \sigma_y^2} < |A_1| \sigma_x + |A_2| \sigma_y$$

Пример: $A_1 = A_2 = 1, \;\; \sigma_x^2 = \sigma_y^2 = 0.04$

Тогда $\sigma_x^2 + \sigma_y^2 = 0.08, \;\; \sigma_{x+y} = 0.283$

В то же время $\sigma_x = \sigma_y = 0.2, \quad \sigma_x + \sigma_y = 0.4$

Относительная ошибка для суммы и разности двух независимых случайных величин:

$$\frac{\sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}}{\langle x \rangle \pm \langle y \rangle}$$

2) Произведение двух независимых случайных величин

$$f(x,y) = xy \qquad w(x,y) = w_x(x)\, w_y(y)$$

$$\langle xy \rangle = \langle x \rangle \langle y \rangle \qquad \left\langle (xy)^2 \right\rangle = \langle x^2 \rangle \langle y^2 \rangle$$

$$\sigma_{xy}^2 = \left\langle (xy)^2 \right\rangle - \left(\langle xy \rangle \right)^2 = \langle x^2 \rangle \langle y^2 \rangle - \langle x \rangle^2 \langle y \rangle^2 =$$

$$= \sigma_x^2 \sigma_y^2 + \sigma_x^2 \langle y \rangle^2 + \sigma_y^2 \langle x \rangle^2$$

Относительная ошибка:

$$\frac{\sigma_{xy}^2}{\langle xy \rangle^2} = \frac{\sigma_x^2}{\langle x \rangle^2} \frac{\sigma_y^2}{\langle y \rangle^2} + \frac{\sigma_x^2}{\langle x \rangle^2} + \frac{\sigma_y^2}{\langle y \rangle^2} \qquad \frac{\sigma_{xy}}{\langle xy \rangle} < \frac{\sigma_x}{\langle x \rangle} + \frac{\sigma_y}{\langle y \rangle}$$