ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Лекция 8

Несколько случайных величин

$$\vec{x} = \left(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots, x_N \right)$$

$$w\left(\vec{x}\right) = w\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots, x_N \right)$$

$$P\left(x_1 \le \tilde{x}_1 \le x_1 + dx_1, \;\; \ldots \;\; , x_N \le \tilde{x}_N \le x_N + dx_N \right) =$$

$$= w\left(x_1, \ldots, x_N \right) dx_1 \ldots dx_N = w\left(\vec{x}\right) d\vec{x}$$

Условие нормировки:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} w\left(x_1 \ldots x_N \right) dx_1 \ldots dx_N = 1$$

Начальные моменты n-й случайной величины m-го порядка

$$m_{x_n}^{(m)} = E\left\{ x_n{}^m \right\} = \left\langle \left(x_n \right)^m \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} \left(x_n \right)^m w\left(x_1 \ldots x_N \right) dx_1 \ldots dx_N$$

$$1 \le n \le N$$

Центральные моменты n-й случайной величины m-го порядка

$$\mu_{x_n}^{(m)} = E\left\{ \left(x_n - E\left\{ x_n \right\} \right)^m \right\} = \left\langle \left(x_n - \left\langle x_n \right\rangle \right)^m \right\rangle =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} \left(x_n - \left\langle x_n \right\rangle \right)^m w\left(x_1 \ldots x_N \right) dx_1 \ldots dx_N$$

$$1 \le n \le N$$

Ковариация k-й и l-й случайных величин

$$\operatorname{cov}\left(x_k, x_l\right) = E\left\{\left(x_k - E\left\{x_k\right\}\right)\left(x_l - E\left\{x_l\right\}\right)\right\} =$$

$$= \left\langle\left(x_k - \left\langle x_k\right\rangle\right)\left(x_l - \left\langle x_l\right\rangle\right)\right\rangle =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \ldots \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(x_k - \left\langle x_k\right\rangle\right)\left(x_l - \left\langle x_l\right\rangle\right) w\left(x_1 \ldots x_N\right) dx_1 \ldots dx_N$$

$$1 \le k \le N \qquad 1 \le l \le N$$

Ковариационная матрица

$$\sigma_{kl} = \operatorname{cov}(x_k, x_l) = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \sigma_{13} & \dots & \sigma_{1N} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \sigma_{23} & \dots & \sigma_{2N} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_3^2 & \dots & \sigma_{3N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{N1} & \sigma_{N2} & \sigma_{N3} & \dots & \sigma_N^2 \end{pmatrix}$$

Ковариационная матрица симметрична:

$$\sigma_{kl} = \sigma_{lk}$$

$$\operatorname{cov}(x_k, x_l) = \operatorname{cov}(x_l, x_k)$$

Математическое ожидание любой функции N случайных аргументов:

$$E\left[f\left(x_1 \ldots x_N\right)\right]=\left\langle f\left(x_1 \ldots x_N\right)\right\rangle=\int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} f\left(x_1 \ldots x_N\right) w\left(x_1 \ldots x_N\right) dx_1 \ldots dx_N$$

Случай, когда все N случайных величин статистически независимы друг от друга:

$$w\left(x_1, x_2, ..., x_N\right) = w_1\left(x_1\right) \cdot w_2\left(x_2\right) \cdot ... \cdot w_N\left(x_N\right) = \prod_{n=1}^{N} w_n\left(x_n\right)$$

Рассмотрим два случая функции N случайных величин:

1. $f\left(\vec{x}\right)$ аддитивна: $f\left(\vec{x}\right) = \sum_{n=1}^{N} f_n\left(x_n\right)$ Тогда $\left\langle f\left(\vec{x}\right)\right\rangle = \sum_{n=1}^{N} \left\langle f_n\left(x_n\right)\right\rangle$

2. $f\left(\vec{x}\right)$ мультипликативна: $f\left(\vec{x}\right) = \prod_{n=1}^{N} f_n\left(x_n\right)$

Тогда $\left\langle f\left(\vec{x}\right)\right\rangle = \prod_{n=1}^{N} \left\langle f_n\left(x_n\right)\right\rangle$

Когда все N случайных величин статистически независимы, все ковариации равны нулю.
Тогда ковариационная матрица диагональна:

$$\sigma_{kl} = \operatorname{cov}\left(x_k, x_l\right) = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3^2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \sigma_N^2 \end{pmatrix}$$

Если все дисперсии равны друг другу:

$$\sigma_{kl} = \operatorname{cov}\left(x_k, x_l\right) = \sigma_x^2 I$$

где I — единичная матрица

Сумма N независимых случайных величин:

$$f\left(\vec{x}\right)=\sum_{n=1}^{N}x_n$$

ПФМ суммы N независимых случайных величин:

$$M_{\Sigma x_n}^{(I)}=\left\langle e^{u\sum_{n=1}^{N}x_n}\right\rangle=\left\langle\prod_{n=1}^{N}e^{ux_n}\right\rangle=\prod_{n=1}^{N}\left\langle e^{ux_n}\right\rangle=\prod_{n=1}^{N}M_{x_n}^{(I)}\left(u\right)$$

Если все x_n распределены по одинаковому закону:

$$M_{\Sigma x_n}^{(I)}=\left[M_{x_n}^{(I)}\left(u\right)\right]^N$$

Пример: у всех x_n распределение нормальное с одинаковыми параметрами $\langle x \rangle$ и σ_x^2 :

$$M_x^{(I)} = e^{\left(\frac{\sigma_x^2 u^2}{2} + u\langle x \rangle\right)}$$

Тогда $$M_{\Sigma x}^{(I)}(u) = e^{N\left(\frac{\sigma_x^2 u^2}{2} + u\langle x \rangle\right)} =$$

$$= e^{\frac{N\sigma_x^2 u^2}{2} + uN\langle x \rangle} = e^{\frac{\sigma_{\Sigma x}^2 u^2}{2} + u\langle \Sigma x \rangle}$$

где $\langle \Sigma x \rangle = N\langle x \rangle$, $\quad \sigma_{\Sigma x}^2 = N\sigma_x^2$

$$\sigma_{\Sigma x} = \sqrt{N}\sigma_x$$

Сумма всех x_n также имеет нормальное распределение:

$$w(\Sigma x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{\Sigma x}^2}} e^{-\frac{\left(\Sigma x - \langle \Sigma x \rangle\right)^2}{2\sigma_{\Sigma x}^2}}$$

где $\langle \Sigma x \rangle = N \langle x \rangle, \qquad \sigma_{\Sigma x}^2 = N\sigma_x^2$

Условие нормировки:

$$\int_{-\infty}^{\infty} w(\Sigma x)\, d(\Sigma x) = 1$$

Общий случай: $$\left.\frac{d^n M_{\Sigma x}^{(I)}}{du^n}\right|_{u=0} = m_{\Sigma x}^{(n)}$$

$$\langle \Sigma x \rangle = \left.\frac{dM_{\Sigma x}^{(I)}}{du}\right|_{u=0} = \left.\left\{\frac{d}{du}\left[M_x^{(I)}(u)\right]^N\right\}\right|_{u=0} = \left.\left\{N\left[M_x^{(I)}(u)\right]^{N-1}\frac{dM_x^{(I)}(u)}{du}\right\}\right|_{u=0} = N\langle x \rangle$$

$$\left\langle (\Sigma x)^2 \right\rangle = \left.\frac{d^2 M_{\Sigma x}^{(I)}}{du^2}\right|_{u=0} =$$

$$= \left.\left\{N(N-1)\left[M_x^{(I)}(u)\right]^{N-2}\left[\frac{dM_x^{(I)}(u)}{du}\right]^2 + N\left[M_x^{(I)}(u)\right]^{N-1}\frac{d^2 M_x^{(I)}(u)}{du^2}\right\}\right|_{u=0} =$$

$$= N(N-1)\langle x \rangle^2 + N\langle x^2 \rangle$$

Дисперсия суммы одинаково распределенных случайных величин:

$$\sigma_{\Sigma x}^2 = \left\langle \left(\Sigma x \right)^2 \right\rangle - \left\langle \Sigma x \right\rangle^2 = N\left(N-1\right)\left\langle x \right\rangle^2 + N\left\langle x^2 \right\rangle - N^2\left\langle x \right\rangle^2 =$$

$$= N\left\langle x^2 \right\rangle - N\left\langle x \right\rangle^2 = N\sigma_x^2$$

Средне квадратичное отклонение:

$$\sigma_{\Sigma x} = \sqrt{N}\sigma_x$$

Относительное отклонение:

$$\frac{\sigma_{\Sigma x}}{\left\langle \Sigma x \right\rangle} = \frac{\sqrt{N}\sigma_x}{N\left\langle x \right\rangle} = \frac{1}{\sqrt{N}}\frac{\sigma_x}{\left\langle x \right\rangle}$$